CHAPITRE 4

Théorème des Résidus

4.1 Résidus

Définition 4.1.1
Soit $f : \mathscr{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ *une fonction analytique au point* z_0, *et* $\mathscr{C} = \left\{z \in \mathbb{C} \big/ 0 < |z - z_0| < r\right\}$ *(Disque troué). On appelle résidu de* f *au point* z_0, *le cœfficient* a_{-1} *du développement de Laurent de* f *au voisinage de* z_0. *Ce nombre est noté* $\mathscr{R}es(f, z_0)$

Remarque :
Soit

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \cdots + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{(z - z_0)} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots$$

le développement de Laurent de f au voisinage de z_0, comme ce développement existe toujours pour les fonctions analytiques au voisinage de z_0, donc a_{-1} existe toujours et est **FINI**.
Très important :
Dans l'exemple précédent on a trouvé que
$f(z) = \dfrac{2}{(z+1)(z+3)} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{3^{n+1}} = \cdots - \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} - \frac{1}{3} + \frac{z}{3^2} + \cdots$. Cela ne signifie pas que $\mathscr{R}es(f, 0) = 1$, car ce développement ne se fait pas au voisinage de 0 mais dans une couronne qui n'est pas un disque troué.
Par contre :

$$f(z) = \frac{2}{(z+1)(z+3)} = \frac{1}{z+1} - \frac{1}{z+3} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right) z^n = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} z + \cdots$$

donne $\mathscr{R}es(f, 0) = 0$.

4.2 Résidu à l'infini

Si f admet un développement de Laurent pour z très grand, alors on peut toujours définir le résidu de f au voisinage de l'infini. Considérons l'expression $f(z)\, dz$, si z est

au voisinage de l'infini alors $\frac{1}{z}$ se trouve au voisinage de 0. Posons $t = \frac{1}{z}$; on a donc $f(z)\,dz = -\frac{1}{t^2} f\left(\frac{1}{t}\right) dt$, d'où la définition :

Définition 4.2.1
Soit $f : \mathscr{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction analytique au point z_0, et $\mathscr{C} = \left\{z \in \mathbb{C} \middle/ |z| > R,\ R > 0\right\}$. On appelle résidu de f à l'infini, le nombre $\mathscr{R}es(f, \infty) = \mathscr{R}es(g, 0)$ avec $g(z) = -\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right)$

Remarque 4.2.1
Posons : $f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n z^n \Longrightarrow -\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) = -\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{a_n}{z^{n+2}}$
D'où l'on tire : $\mathscr{R}es(f, \infty) = -a_{-1}$, *et donc :*

$$\boxed{\mathscr{R}es(f, 0) + \mathscr{R}es(f, \infty) = 0}$$

Remarque 4.2.2 *Si $f(z)$ se présente sous la forme $f(z) = g\left(\frac{1}{z}\right)$ alors ;*

$$\mathscr{R}es(f, \infty) = -g'(0)$$

4.2.1 Points singuliers des fonctions analytiques

Soit f une fonction analytique dans un ensemble ouvert connexe :
$\Omega = \left\{z \in \mathbb{C} \middle/ |z - z_0| < r\ \ r > 0\right\} \subset \mathbb{C}$; soit a un point frontière de Ω, c'est à dire $|a - z_0| = r$. Si f peut être prolonger en une fonction analytique en a, on dira qu'alors que le point a est un point régulier, f est donc bornée au voisinage de a ; sinon c'est un point singulier.

4.2.1.1 types de singularités

Soit le développement de Laurent d'une fonction f au voisinage de a.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{(z - a)^n}.$$

Trois cas se présentent alors :
1er Cas :
Tous les d_n sont nuls. f est donc analytique en $z = a$. Le développement de Laurent coïncide avec la série de Taylor au voisinage de a.
2ème Cas :
Un nombre fini de d_n n'est pas nul. Soit alors m le plus grand entier positif tel que $d_m \neq 0$. Alors $(z-a)^m f(z)$ est analytique au point a. On dira alors que a est une singularité d'ordre m, ou pôle d'ordre m ; (pôle simple, double, triple, . . . pour $m = 1, 2, 3, \ldots$).
3ème Cas :
Un nombre infini de termes d_n n'est pas nul. a est appelé singularité essentielle de f. Pour tout entier positif m ; $(z - a)^m f(z)$ n'est pas borné au voisinage de a.

4.2.2 Théorème des résidus

Théorème 4.2.1
Soit Ω un ouvert simplement connexe, et $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \Omega$.
Soit $\Omega' = \Omega / \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ et

$$f : \Omega' \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \textit{analytique}.$$

$$\gamma : [a, b] \longrightarrow \Omega', \quad \textit{un lacet quelconque dans } \Omega'.$$

alors

$$\boxed{\int_\gamma f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathscr{R}es(f, a_k).I(a_k, \gamma)}$$

Preuve :
Posons $\mathscr{D}_k = \left\{ z \in \Omega \middle/ 0 < |z - a_k| < r_k \right\} \subset \Omega$, on choisira r_k aussi petit que possible de telle manière que $\mathscr{D}_k \cap \mathscr{D}_{k'} = \emptyset$ pour $k \neq k'$; et soit $\mathscr{C}_k = \mathscr{D}_k \setminus \{a_k\}$.
f étant analytique dans $\mathscr{C}_k$ admet donc un développement de Laurent dans cet ensemble :

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{n,k}(z - a_k)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n,k}(z - a_k)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n,k}}{(z - a_k)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n,k}(z - a_k)^n + u_k(z).$$

Posons alors $g(z) = f(z) - \sum_{k=1}^{n} u_k(z)$, donc :

- g est analytique dans Ω' .
- Si $z \in \mathscr{C}_k$ $g(z) = (f(z) - u_k(z)) - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} u_j(z)$

comme pour $j \neq k$ le point a_k est régulier pour $u_j(z)$, il l'est aussi pour $\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} u_j(z)$; d'autre part, par définition le point a_k est régulier pour $f(z) - u_k(z)$ donc il l'est pour g. on peut donc prolonger g en une fonction analytique dans Ω tout entier, comme Ω est simplement connexe, le théorème de Cauchy donne

$$\int_\gamma g(z)\, dz = 0,$$

d'où la formule.

4.2.2.1 Calcul pratique du résidu d'une fonction :

Soit $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ le développement de Laurent de f au voisinage de z_0. L'intégrale de f le long d'un lacet ne dépend donc que d'un cœfficient dans le développement de Laurent ; qui est a_{-1}. On va montrer que dans beaucoup de cas on peut déterminer ce cœfficient sans passer par le développement de Laurent.

On va distinguer deux cas.
1er Cas :z_0 est un pôle simple.
Soit alors $f(z) = \dfrac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + \cdots$

$(z - z_0)f(z) = a_{-1} + (z - z_0)a_0 + a_1(z - z_0)^2 + \cdots = \mathscr{R}es(f, z_o) + (z - z_0)a_0 + a_1(z - z_0)^2 + \cdots$
et par passage à la limite, on obtient :

$$\boxed{\mathscr{R}es(f, z_o) = \lim_{z \longrightarrow z_0} (z - z_0)f(z).} \tag{4.1}$$

Si $f(z)$ se présente sous la forme,

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} \quad \text{où} \quad Q(z_0) = 0 \quad \text{et} \quad Q'(z_0) \neq 0, \tag{4.2}$$

alors :

$$\boxed{\mathscr{R}es(f, z_0) = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}.} \tag{4.3}$$

Remarque 4.2.3 *Si $a_{-1} = 0$, la singularité est appelée «singularité apparente», «pôle apparent», ou «fausse singularité».*

Exemple 4.2.1

$f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$, on a $\lim\limits_{z \longrightarrow 0} z.f(z) = 0$; 0 est une singularité apparente de f.
On peut le voir immédiatement en utilisant le développement de Laurent f.
On a, $f(z) = \dfrac{\sin z}{z} = \dfrac{1}{z} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n+1)!} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \cdots$
On voit bien qu'il n'y a pas du tout de singularité.

Exemple 4.2.2

Donnons le résidu de $f(z) = \dfrac{e^{z^2}}{z^3 + 1}$; au point $z_0 = -1$.
$z_0 = -1$ est un pôle simple et f se présente sous la forme (4.2) ; on a donc,
$\dfrac{e^{z^2}}{(z^3 + 1)'} = \dfrac{e^{z^2}}{3z^2} \Longrightarrow \mathscr{R}es(f, -1) = \dfrac{e^{(-1)^2}}{3(-1)^2} = \dfrac{e}{3}.$
2ème Cas :a est un pôle multiple.
Soit m l'ordre de la singularité de z_0. Écrivons :
$f(z) = \dfrac{a_{-m}}{(z - z_0)^m} + \dfrac{a_{-m+1}}{(z - z_0)^{m-1}} + \cdots + \dfrac{a_{-1}}{(z - z_0)} + a_0 + a_1(z - z_0) + \cdots \Longrightarrow$
$(z - z_0)^m f(z) = a_{-m} + a_{-m+1}(z - z_0) + a_{-m+2}(z - z_0)^2 + \cdots + a_{-1}(z - z_0)^{m-1} + a_0(z - z_0)^m + \cdots$
En dérivant jusqu'à l'ordre $m - 1$, on obtient :
$((z - z_0)^m f(z))^{(m-1)} = (m - 1)! a_{-1} + a_0(m - 1)!(z - z_0) + \cdots;$
d'où l'on obtient :

$$\boxed{\mathscr{R}es(f, z_0) = \frac{1}{(m - 1)!} \cdot \lim_{z \longrightarrow z_0} \Big((z - z_0)^m f(z)\Big)^{(m-1)}.} \tag{4.4}$$

Cette formule est intéressante seulement quand l'ordre est 2 ou 3 à la limite. Si l'ordre est grand 4 ou plus, mieux faut utiliser le développement de Laurent.

Remarque 4.2.4 *Dans le cas où $f(z)$ est le rapport de deux fonctions $g(z)$ et $h(z)$ ayant z_0 comme zéros, alors il n'est pas facile de donner immédiatement l'ordre de la singularité de f. Dans ce cas, le procédé le plus sûr consiste dans le remplacement des fonctions $g(z)$ et $h(z)$ par un certain nombre de termes de leurs développements en série de Taylor au voisinage de z_0.*

Exemple 4.2.3

Trouver le résidu au point $z_0 = 0$ de la fonction $f(z) = \dfrac{1}{z^2\cos(z-1)}$; 0 est un pôle d'ordre 2 ; on a :

$$\mathscr{R}es(f,0) = \frac{1}{1!}\cdot\lim_{z\longrightarrow 0}((z^2 f(z))' = \lim_{z\longrightarrow 0}\left(\frac{1}{\cos(z-1)}\right)' = \lim_{z\longrightarrow 0}\left(\frac{\sin(z-1)}{\cos^2(z-1)}\right) = -\frac{\sin 1}{\cos^2 1}.$$

Exemple 4.2.4

Trouver le résidu au point $z_0 = i$ de la fonction $f(z) = \dfrac{\cos z}{(z^2+1)^3}$; i est un pôle d'ordre 3 ; on a :

$$\mathscr{R}es(f,i) = \frac{1}{2!}\cdot\lim_{z\longrightarrow i}((z-i)^3 f(z))'' = \frac{1}{2}\lim_{z\longrightarrow i}\left(\frac{\cos z}{(z+i)^3}\right)'' = \frac{1}{2}\lim_{z\longrightarrow i}\left(\frac{-(z+i)\sin z - 3\cos z}{(z+i)^4}\right)'$$
$$= \frac{1}{2}\lim_{z\longrightarrow i}\left(\frac{6(z+i)^2\sin z + (12-(z+i)^2)\cos z}{(z+i)^5}\right) = \frac{(3\,\mathrm{sh}\,1 - 4\,\mathrm{ch}\,1)\,i}{16}.$$

Exemple 4.2.5

Trouver le résidu au point $z_0 = 0$ de la fonction $f(z) = \dfrac{1+z^{10}}{z^6(4+z)}$; 0 est un pôle d'ordre 6 ;

Inutile de préciser qu'on n'utilisera pas la formule (4.4). On utilisera directement le développement de Laurent.

$$f(z) = \frac{1+z^{10}}{z^6(4+z)} = \frac{1}{4z^6}\cdot\frac{1+z^{10}}{(1+z/4)} = \frac{1}{4z^6}\cdot(1+z^{10})(1-z/4+z^2/4^2-z^3/4^3+\cdots+(-1)^n z^n/4^n+\cdots).$$

Dans ce produit, seul le cœfficient de z^5 est utile, et qui est $-1/4^5$.

D'où $\mathscr{R}es(f,0) = 1/4\cdot(-1)/4^5 = -\dfrac{1}{4^6} = -\dfrac{1}{4096}$.

Exemple 4.2.6

Trouver le résidu au point $z_0 = 0$ de la fonction $f(z) = \dfrac{\mathrm{tg}\,z - z}{(1-\cos z)^2}$; ici il n'est pas facile de dire directement l'ordre de la singularité ; on va utiliser la remarque (4.2.4).

$$f(z) = \frac{\mathrm{tg}\,z - z}{(1-\cos z)^2} = \frac{\frac{1}{3}z^3 + \frac{2}{15}z^5 + \frac{17}{315}z^7 + \cdots}{\frac{1}{4}z^4 - \frac{1}{24}z^6 + \cdots} = \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{z} + \frac{34}{45}z + \frac{1229}{3780}z^3 + \cdots$$

0 est donc une singularité simple et on a $\mathscr{R}es(f,0) = \dfrac{4}{3}$.

Exemple 4.2.7

Trouver le résidu au point $z_0 = 0$ de la fonction $f(z) = z\cos^2\dfrac{\pi}{z}$.

On a $f(z) = z\cos^2\dfrac{\pi}{z} = z\dfrac{1+\cos(2\pi/z)}{2} = \dfrac{z}{2}\left(1 + \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{2n}\pi^{2n}}{(2n)!z^{2n}}\right)$

$$= z\left(1 - \frac{\pi^2}{z^2} + 1/3\frac{\pi^4}{z^4} - 2/45\frac{\pi^6}{z^6} + \cdots\right) = z - \frac{\pi^2}{z} + \frac{\pi^4}{3z^3} - \frac{2\pi^6}{45z^5} + \cdots$$

0 est donc une singularité essentielle, on a d'après ce développement de Laurent que $\mathcal{R}es(f, 0) = -\pi^2$.

4.3 Application du théorème des résidus à des calculs d'intégrales

4.3.1 Intégrale du type $I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$

On suppose que f soit la restriction à $\mathbb{R}$ d'une fonction f, qui est analytique dans un ensemble ouvert de la forme $D' = D - \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ où D contient le demi plan fermé $\operatorname{Im} z \geq 0$, et les a_k sont des points du demi-plan ouvert $\operatorname{Im} z > 0$.
On considère alors un lacet γ, juxtaposition $\gamma_1 \vee \gamma_2$ de deux chemins suivants :

$$\begin{array}{lll} \gamma_1 : t \longrightarrow t, & \text{pour} & -R \leq t \leq R. \\ \gamma_2 : t \longrightarrow R\,e^{it}, & \text{pour} & 0 \leq t \leq \pi. \end{array}$$

Où le nombre R est pris tel que $R > |a_k|$ pour tous les indices k ; il est immédiat que l'on a pour tout k, $\mathcal{J}(a_k, \gamma) = 1$.
Le théorème des résidus permet d'écrire,

$$\int_{-R}^{R} f(x)\, dx + \int_{\gamma_2} f(z)\, dz = \int_{\gamma} f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathcal{R}es(f, a_k).$$

Si de plus,

$$\lim_{R \longrightarrow \infty} \int_{\gamma_2} f(z)\, dz = 0,$$

par passage à la limite on a donc :

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathcal{R}es(f, a_k).} \tag{4.5}$$

Premier cas :
$f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ où P et Q sont des polynômes premiers entre eux. Aucun des zéros de Q n'étant réel. Supposons en outre que l'on ait,

$$\deg Q \geq 2 + \deg P.$$

La formule (4.5) est valable, les a_k étant les zéros de Q tels que $\operatorname{Im} a_k > 0$.

Exemple 4.3.1 *Calculer l'intégrale :*

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x^2\, dx}{(x^2+1)(x^2+9)}.$$

Remarquons que $I = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2\,dx}{(x^2+1)(x^2+9)}$. Posons alors,

$$f(z) = \frac{1}{2}\,\frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+9)}.$$

Ici on a $P(z) = z^2$ et $Q(z) = 2(z^2+1)(z^2+9)$, et $\deg Q = 4 \geq 2 + \deg P = 2 + 2 = 4$.
les racines de $Q(z)$ sont $i, -i, 3i$ et $-3i$, donc aucune n'est réelle, la formule (4.5) est donc applicable.
Seuls i et $3i$ ont des parties imaginaires strictement positifs, d'où

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{z^2\,dz}{(z^2+1)(z^2+9)} = 2\pi i\left(\mathscr{R}es(f,i) + \mathscr{R}es(f,2i)\right)$$

i et $2i$ étant deux pôles simples de f, appliquons la formule (4.3).
Pour le pôle i on a :

$$\begin{aligned}\mathscr{R}es(f,i) &= \lim_{z\longrightarrow i}(z-i)\frac{z^2}{2(z^2+1)(z^2+9)} = \lim_{z\longrightarrow i}\frac{z^2}{(2(z^2+1)(z^2+9))'}\\ &= \lim_{z\longrightarrow i}\frac{z^2}{2((2z)(z^2+9)+(z^2+1)(2z))} = \frac{-1}{2(2i)(8)} = \frac{-1}{32i}.\end{aligned}$$

Pour le pôle $3i$ on a :

$$\begin{aligned}\mathscr{R}es(f,3i) &= \lim_{z\longrightarrow 3i}(z-3i)\frac{z^2}{2(z^2+1)(z^2+9)} = \lim_{z\longrightarrow 3i}\frac{z^2}{(2(z^2+1)(z^2+9))'}\\ &= \lim_{z\longrightarrow 3i}\frac{z^2}{2((2z)(z^2+9)+(z^2+1)(2z))} = \frac{-9}{2(6i)(-8)} = \frac{3}{32i}.\end{aligned}$$

D'où,

$$I = 2\pi i\left(\frac{-1}{32i} + \frac{3}{32i}\right) = \frac{\pi}{8}.$$

Exemple 4.3.2 *Calculer l'intégrale :*

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2ix+2-4i}.$$

Posons $f(z) = \dfrac{1}{z^2+2iz+2-4i}$. Les pôles de f sont simples et on a $z_1 = 1+i$ et $z_2 = -1-3i$, $\mathscr{I}m(z_2) < 0$, est à rejeter.
Les conditions sont toutes vérifiées, on a alors,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2ix+2-4i} = 2\pi i\mathscr{R}es(f, 1+i).$$

$$\mathscr{R}es(f,1+i) = \lim_{z\longrightarrow 1+i}(z-1-i)f(z) = \lim_{z\longrightarrow 1+i}(z-1-i)\frac{1}{z^2+2iz+2-4i} = \lim_{z\longrightarrow 1+i}\frac{1}{2z+2i} = \frac{1}{2+4i}.$$

Finalement,

$$I = 2\pi i\cdot\frac{1}{2+4i} = \frac{2\pi}{5} + i\frac{\pi}{5}.$$

Remarquons que, $f(x) = \dfrac{1}{x^2+2ix+2-4i} = \dfrac{(x^2+2)-i(2x-4)}{(x^2+2)^2+(2x-4)^2} = \dfrac{(x^2+2)-i(4-2x)}{x^4+8x^2-16x+20}$,
d'où l'on déduit,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^2+2)dx}{x^4+8x^2-16x+20} = \frac{2\pi}{5},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(4-2x)dx}{x^4+8x^2-16x+20} = \frac{\pi}{5}.$$

Deuxième cas :
$f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}\ e^{imz}$, $m > 0$; où P et Q sont des polynômes premiers entre eux. Aucun des zéros de Q n'étant réel. Supposons en outre que l'on ait,

$$\deg Q \geq 1 + \deg P.$$

La formule (4.5) est valable, les a_k étant les zéros de Q tels que $\operatorname{Im} a_k > 0$.

Exemple 4.3.3 *calculer l'intégrale*

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x\, dx}{x^2 + 2x + 2}.$$

Soit $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{z^2 + 2z + 2}$, on a deux pôles simples $z_1 = -1 + i$, et $z_2 = -1 - i$ ce dernier est à rejeter.

On a donc $\mathscr{R}es(f, -1 + i) = \lim\limits_{z \longrightarrow -1+i} (z + 1 - i) f(z) = \lim\limits_{z \longrightarrow -1+i} (z + 1 - i) \dfrac{e^{iz}}{z^2 + 2z + 2} = \dfrac{e^{-1-i}}{2i}.$

Finalement, $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}\ dx}{x^2 + 2x + 2} = 2\pi i \frac{e^{-1-i}}{2i} = \pi\, e^{-1-i} = \pi\, e^{-1}(\cos 1 - i \sin 1)$ d'où l'on déduit,

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x\, dx}{x^2 + 2x + 2} = -\pi\, e^{-1} \sin 1,$$

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x\, dx}{x^2 + 2x + 2} = \pi\, e^{-1} \cos 1.$$

4.3.2 Intégrale du type $I = \int_{-\pi}^{\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)\, d\theta$

Soit $R(x, y)$ une fonction rationnelle en x et en y qui n'a pas de pôles sur le cercle $x^2 + y^2 = 1$, alors on a :

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)\, d\theta = \int_{|z|=1} R\left(\frac{z + z^{-1}}{2}, \frac{z - z^{-1}}{2i}\right) \frac{dz}{iz} \tag{4.6}$$

L'égalité (4.6) est justifiée par le changement de variables suivant :
$z = e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta \Longrightarrow z^{-1} = e^{-i\theta} = \cos\theta - i \sin\theta$
d'où l'on tire
$\cos\theta = \dfrac{z + z^{-1}}{2}$, $\quad \sin\theta = \dfrac{z - z^{-1}}{2i}$ et $dz = i\, e^{i\theta}\ d\theta \Longleftrightarrow d\theta = \dfrac{dz}{iz}.$
Posons : $f(z) = \dfrac{1}{iz} \cdot R\left(\dfrac{z + z^{-1}}{2}, \dfrac{z - z^{-1}}{2i}\right)$, on a alors :

$$\boxed{I = 2\pi i \sum \mathscr{R}es\left(f(z), z_k\right),}$$

où la somme est étendue à tous les pôles de $f(z)$ tels que $|z_k| < 1$.

Exemple 4.3.4 *Calculer l'intégrale*

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + b\sin\theta}, \quad et\ a > |b|.$$

Réponse :

$$f(z) = \frac{1}{iz} \cdot \frac{1}{a + b\dfrac{z - z^{-1}}{2i}} = \frac{2}{bz^2 + 2aiz - b}.$$

Les pôles de $\dfrac{2}{bz^2 + 2aiz - b}$ sont obtenus en résolvant $bz^2 + 2aiz - b = 0$ et sont donnés par,

$z_1 = \dfrac{-a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b} i$ et $z_2 = \dfrac{-a - \sqrt{a^2 - b^2}}{b} i$,

seul z_1 est à l'intérieur du cercle, car $|z_1| = \left|\dfrac{-a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b}\right| = \left|\dfrac{b}{a + \sqrt{a^2 - b^2}}\right| < 1$, car $a < |b|$. Comme $z_1 z_2 = -1$, donc nécessairement $|z_2| > 1$.

ce sont deux pôles simples, le résidu en z_1 est donc ;

$$\mathcal{R}es(f, z_1) = \lim_{z \longrightarrow z_1} (z - z_1)\frac{2}{bz^2 + 2aiz - b} = \lim_{z \longrightarrow z_1} \frac{2}{2bz + 2ai} = \frac{1}{i\sqrt{a^2 - b^2}},$$

d'où $I = 2\pi i \dfrac{1}{i\sqrt{a^2 - b^2}}$ finalement,

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + b\sin\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}, \quad \text{et } a > |b|.$$

Exemple 4.3.5 *Calculer :*

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\cos n\theta \, d\theta}{5 + 3\cos\theta}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Réponse :

La formule de Moivre donne $\cos n\theta = \dfrac{z^n + z^{-n}}{2}$, d'où en substituant dans notre intégrale, on a :

$$f(z) = \frac{1}{iz} \cdot \frac{\dfrac{z^n + z^{-n}}{2}}{5 + 3\dfrac{z + z^{-1}}{2}} = -i\frac{z^{2n} + 1}{z^n(3z^2 + 10z + 3)}.$$

Pôles de f :

$z_0 = 0$, est un pôle d'ordre n.

$3z^2 + 10z + 3 = (3z + 1)(z + 3) = 0$, deux pôles simples $z_1 = -\dfrac{1}{3}$ et $z_2 = -3$; seul $z_2 = -3$ a un module supérieur à 1, d'où :

$$I = 2\pi i \left(\mathcal{R}es\,(f(z), 0) + \mathcal{R}es\,(f(z), -1/3)\right).$$

Calcul des résidus :

Pour $z_1 = -1/3$, il s'agit d'un pôle simple, donc ;

$\mathcal{R}es\,(f(z),-1/3) = \lim\limits_{z\longrightarrow -1/3}(z+1/3)\dfrac{-i(z^{2n}+1)}{z^n(3z+1)(z+3)} = \lim\limits_{z\longrightarrow -1/3}\dfrac{-i(z^{2n}+1)}{3z^n(z+3)} = -i(-1)^n\dfrac{1+3^{2n}}{8.3^n}\cdot$

Pour $z_0 = 0$, qui est un pôle d'ordre n, il est préférable de faire le développement de Laurent de f au voisinage de 0.

Remarquant que $f(z) = -i\dfrac{z^{2n}+1}{z^n(3z^2+10z+3)} = -i\dfrac{z^n}{(3z^2+10z+3)} - i\dfrac{1}{z^n(3z^2+10z+3)}\cdot$

Comme 0 n'est pas un pôle de $-i\dfrac{z^n}{(3z^2+10z+3)}$, donc $\mathcal{R}es\left(-i\dfrac{z^n}{(3z^2+10z+3)},0\right) = 0.$

D'où $\mathcal{R}es\,(f(z),0) = \mathcal{R}es\left(-i\dfrac{1}{z^n(3z^2+10z+3)},0\right).$

On a $-i\dfrac{1}{z^n(3z^2+10z+3)} = \dfrac{1}{z^n}\dfrac{-i}{3z^2+10z+3} = \dfrac{-i}{z^n}\left(\dfrac{9}{24}\cdot\dfrac{1}{1+3z} - \dfrac{1}{24}\cdot\dfrac{1}{1+z/3}\right)$. Un développement en série entière au voisinage de zéro donne :

$$\begin{aligned}\frac{9}{24}\cdot\frac{1}{1+3z} - \frac{1}{24}\cdot\frac{1}{1+z/3} &= \frac{9}{24}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n3^nz^n - \frac{1}{24}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z/3)^n\\ &= \frac{1}{24}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(3^{n+2}-\frac{1}{3^n}\right)z^n,\ \text{où } |z|<\frac{1}{3}\cdot\end{aligned}$$

D'où l'on tire que ;

$\mathcal{R}es\,(f(z),0) = \dfrac{-i}{24}(-1)^{n-1}\left(3^{n+1}-\dfrac{1}{3^{n-1}}\right).$

Finalement ;

$I = 2\pi i\left(\dfrac{-i}{24}(-1)^{n-1}\left(3^{n+1}-\dfrac{1}{3^{n-1}}\right) - i(-1)^n\dfrac{1+3^{2n}}{8.3^n}\right) = \dfrac{\pi}{2}\dfrac{(-1)^n}{3^n}\cdot$

$$I = \int_0^{2\pi}\frac{\cos n\theta\,d\theta}{5+3\cos\theta} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{(-1)^n}{3^n},\quad n\in\mathbb{N}.$$

4.3.3 Intégrale du type $I = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1}Q(x)\,dx.$

α est un réel strictement positif, R une fraction rationnelle n'ayant pas de pôle réel positif ou nul, et telle que $Q(0)\neq 0$ et $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} x^{\alpha}|Q(x)| = 0.$

Si $Q = P/S$ ou P et S sont deux polynômes, on a $\deg P < \deg S - \alpha$.

On va considérer cette fois la fonction

$$f(z) = (-z)^{\alpha-1}Q(z)$$

$(-z)^{\alpha-1} = \mathrm{e}^{(\alpha-1)\,\mathrm{Log}(-z)}$ ou $\mathrm{Arg}(\mathrm{Log}(z)) \in]-\pi,\pi[$.

On considère le lacet γ, juxtaposition $\gamma_1\vee\gamma_2\vee\gamma_3\vee\gamma_4$ de quatre chemins

$\gamma_1(t) = \mathrm{e}^{i\lambda t}$ pour $r\le t\le R$

$\gamma_2(t) = R\,\mathrm{e}^{it}$ pour $\lambda\le t\le 2\pi-\lambda$

$\gamma_3(t) = -\,\mathrm{e}^{-i\lambda t}$ pour $-R\le t\le -r$

$\gamma_4(t) = r\,\mathrm{e}^{i(2\pi-t)}$ pour $\lambda\le t\le 2\pi-\lambda.$

$$\boxed{I = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1}Q(x)\,dx = \frac{\pi}{\sin\alpha\pi}\sum \mathcal{R}es\left((-z)^{\alpha-1}Q(z),z_k\right)}$$

où la somme est étendue à tous les pôles de la fraction $R(z)$.

Exemple 4.3.6 *Calculer l'intégrale*

$$I = \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}(1+x)}\cdot$$

Réponse :

Ici on a $\alpha - 1 = -\dfrac{1}{3}$ et donc $\alpha = 2/3$. On a ici $Q(z) = \dfrac{1}{z+1}$, un seul pôle $z = -1$.

$I = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}(1+x)} = \frac{\pi}{\sin(2/3\pi)} \mathscr{R}es\left((-z)^{-1/3}Q(z), -1\right)$.

$\mathscr{R}es\left((-z)^{-1/3}\dfrac{1}{z+1}, -1\right) = \displaystyle\lim_{z \longrightarrow -1} (z+1)(-z)^{-1/3}\frac{1}{z+1} = 1,$

$I = \dfrac{\pi}{\sin(2/3\pi)} = \dfrac{\pi}{\sqrt{3}/2} = \dfrac{2\pi\sqrt{3}}{2}\cdot$

4.3.4 Intégrale du type $I = \int_0^{\infty} Q(x) \operatorname{Log} x \, dx$.

Q une fraction rationnelle n'ayant pas de pôle réel positif ou nul, $Q(0) \neq 0$ et telle que $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow \infty} xQ(x) = 0$.

En gardant le lacet précédent et en considérant le fonction $f(z) = Q(z) \operatorname{Log}^2 z$.

Les intégrales sur γ_2 et γ_4 tendent vers zéro lorsque $r \longrightarrow 0$ et $R \longrightarrow \infty$.

Et à la limite quand $\lambda \longrightarrow 0$, $\log z = \operatorname{Log} x$ sur γ_1, et $\operatorname{Log} z = \operatorname{Log} x + 2\pi i$ sur γ_3.

On obtient ainsi la relation,

$$\int_0^{\infty} Q(x) \operatorname{Log}^2 x \, dx - \int_0^{\infty} Q(x)(\operatorname{Log} x + 2\pi i)^2 \, dx = 2\pi i \sum \mathscr{R}es\left(Q(z) \operatorname{Log}^2 z\right),$$

d'où

$$-2\int_0^{\infty} Q(x) \operatorname{Log} x \, dx - 2\pi i \int_0^{\infty} Q(x) \, dx = \sum \mathscr{R}es\left(Q(z) \operatorname{Log}^2 z\right).$$

La somme est étendue à tous les pôles de la fraction $Q(z)$.

Dans le cas où, Q est une fonction réelle, on obtient deux intégrales.

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} Q(x) \operatorname{Log} x \, dx &= -\frac{1}{2} \mathscr{R}e\left(\sum \mathscr{R}es\left(Q(z) \operatorname{Log}^2 z\right)\right), \\ \int_0^{\infty} Q(x) \, dx &= -\frac{1}{2\pi} \mathscr{I}m\left(\sum \mathscr{R}es\left(Q(z) \operatorname{Log}^2 z\right)\right). \end{aligned}$$

Remarque 4.3.1 *En intégrant la fonction* $Q(z) \operatorname{Log} z$, *on obtiendrait de la même manière la formule*

$$\int_0^{\infty} Q(x) \, dx = -\sum \mathscr{R}es\left(Q(z) \operatorname{Log} z\right).$$

Posons $I_n = \displaystyle\int_0^{\infty} Q(x) \operatorname{Log}^n x \, dx$, *en intégrant la fonction* $Q(z) \operatorname{Log}^{n+1} z$, *on obtiendrait une relation de récurrence entre* $I_n, I_{n-1}, \cdots, I_1,$ *et* I_0.

$$\sum_{p=0}^{n} (2\pi i)^{n-p} C_{n+1}^{p} I_p = -\sum \mathscr{R}es\left(Q(z) \operatorname{Log}^{n+1} z\right).$$

Exemple 4.3.7 *Calculer :*

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Log} x \, dx}{(x+1)^3}.$$

Réponse :

Ici $Q(x) = \dfrac{1}{(x+1)^3}$, toutes les conditions sont vérifiées, d'où

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Log}^2 x}{(x+1)^3}\, dx - \int_0^{\infty} \frac{(\operatorname{Log} x + 2\pi i)^2}{(x+1)^3}\, dx = 2\pi i \mathscr{R}es\left(\frac{1}{(z+1)^3} \operatorname{Log}^2 z, -1\right),$$

ou encore,

$$-\int_0^{\infty} \frac{4\pi i \operatorname{Log} x - 4\pi^2}{(x+1)^3}\, dx = 2\pi i \mathscr{R}es\left(\frac{1}{(z+1)^3} \operatorname{Log}^2 z, -1\right).$$

Comme -1 est un pôle triple, pour le résidu on a donc,

$$\begin{aligned} \mathscr{R}es\left(\frac{1}{(z+1)^3} \operatorname{Log}^2 z, -1\right) &= \frac{1}{2!} \lim_{z \longrightarrow -1} \left((z+1)^3 \left(\frac{1}{(z+1)^3} \operatorname{Log}^2 z\right)\right)'' \\ &= \frac{1}{2!} \lim_{z \longrightarrow -1} \left(\operatorname{Log}^2 z\right)'' = \lim_{z \longrightarrow -1} \frac{1 - \operatorname{Log} z}{z^2} \\ &= \frac{1 - \operatorname{Log}(-1)}{(-1)^2} = \frac{1 - (0 + i\pi)}{1} = 1 - i\pi. \end{aligned}$$

Finalement,

$$-4\pi i \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Log} x}{(x+1)^3}\, dx + 4\pi^2 \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x+1)^3} = 2\pi i(1 - i\pi) = 2\pi i + 2\pi^2.$$

Conclusion,

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Log} x \, dx}{(x+1)^3} &= -\frac{1}{2} \\ \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x+1)^3} &= \frac{1}{2} \; . \end{aligned}$$